Matrici $n \times n$ esprimibili come combinazioni di matrici

$$(e_{ab})_{ij} = \delta_{ia}\delta_{jb}$$

Le loro moltiplicazioni sono

$$e_{ab}\, e_{cd} = e_{ad}\,\delta_{bc}$$

e i commutatori sono

$$[e_{ab}, e_{cd}] = e_{ad}\,\delta_{bc} - e_{cb}\,\delta_{da}$$

L'identità è $\mathbb{1} = \sum e_{ii}$ e una matrice diagonale

$\mathrm{diag}\,\lambda_i = \sum_i \lambda_i e_{ii}$. Se è una matrice $\mathrm{trace}=0$ $\sum \lambda_i = 0$

Questo è il caso di tutte le matrici di Cartan $h = \sum_i \lambda_i^{(h)} e_{ii}$

$$[h, e_{ab}] = \sum \lambda_i^{(h)} [e_{ii}, e_{ab}]$$

$$= \sum_i \lambda_i^{(h)} (e_{ib}\,\delta_{ia} - e_{ai}\,\delta_{ib})$$

$$= \left( \lambda_a^{(h)} e_{ab} - \lambda_b^{(h)} e_{ab} \right)$$

$$= e_{ab} \left( \lambda_a^{(h)} - \lambda_b^{(h)} \right)$$

cioè $e_{ab}$ ha autovalore $\lambda_a - \lambda_b$

Naturalmente $[h, e_{ii}] = 0$.

Una base $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ di radici positive si può dare come

$$\sigma_1(h) : h = \sum \lambda_i e_{ii} \longrightarrow \lambda_1 - \lambda_2$$

$$\lambda_2 - \lambda_3$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{n-1}(h) : \qquad \lambda_{n-1} - \lambda_n$$

$\sigma_i \in \Pi_\sigma^+$ perché sono indipendenti (c'è sempre un $\lambda$ nuovo a ogni rigo!) e sono $n-1$. Naturalmente ci sono delle altre radici, non semplici, che chiamo $\alpha_i \in \Sigma$

Le norme delle radici si trovano calcolando prima la generica forma di Killing per generici elementi di Cartan dati in questa base da certi $\lambda_i$ e $\tilde{\lambda}_j$

$$\left( \sum_i \lambda_i e_{ii} , \sum_j \tilde{\lambda}_j e_{jj} \right) =$$

$$= \mathrm{Tr} \left\{ \mathrm{Ad} \, \Sigma \left( \lambda_i \, e_{ii} \right) \mathrm{Ad} \left( \sum_j \tilde{\lambda}_j e_{jj} \right) \right\}$$

Potrei calcolarlo ricordando che $\mathrm{Ad}\, h = \mathrm{diag}\, \alpha_i$ e quindi

$(h_1, h_2) = \sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha(h_1) \, \alpha(h_2)$ questo può richiedere di

sapere tutte le $\alpha \in \Sigma$ e noi fino a qui abbiamo dato

esplicitamente solo le $\sigma_i \in \Pi_\sigma^+$.

Posso comunque calcolare la Forma di Killing che mi

serve come una qualunque FdK, trovate le componenti

del $\left[ h, \left[ h', e_{pq} \right] \right]$, facendo la sua proiezione su

$e_{pq}$ stesso.

$h := \sum_i \lambda_i e_{ii} \qquad h' := \sum_i \lambda'_i e_{ii}$

$$[h, [h', e_{pq}]] = [h, (\lambda'_p - \lambda'_q) e_{pq}]$$

$$= (\lambda_p - \lambda_q)(\lambda'_p - \lambda'_q) e_{pq}$$

$\Rightarrow$ da ogni $e_{pq}$ ho un contributo alla traccia pari a

$$(\lambda_p - \lambda_q)(\lambda'_p - \lambda'_q)$$

$\Rightarrow$ la Forma di Killing è

$$\left(\sum_i \lambda_i e_{ii}, \sum_j \lambda'_j e_{jj}\right) = \sum_{p,q} (\lambda_p - \lambda_q)(\lambda'_p - \lambda'_q) =$$

la sommatoria si semplifica se uso la traccia nulla delle matrici, cioè $\sum_p \lambda_p = 0$

$$= \sum_{p,q} \underbrace{\lambda_p \lambda'_p}_{\text{non dipende da } q} + \underbrace{\lambda_q \lambda'_q}_{\text{non dipende da } p} + \sum_q \overbrace{\underbrace{\sum_p \lambda'_p \lambda_q}_{\text{a fissato } q \text{ è proporzionale a } \sum_p \lambda'_p = 0}}^{\text{zero}} + \sum_q \overbrace{\underbrace{\sum_p \lambda_p \lambda'_q}_{\propto \sum_p \lambda_p}}^{\text{zero}}$$

$$= 2n \sum_k \lambda_k \lambda'_k$$

RIASSUMENDO ABBIAMO

$$\left( \sum_i e_{ii} \lambda_i \, , \, \sum_j \tilde{\lambda}_j e_{jj} \right) = 2n \sum_k \lambda_k \lambda_k$$

MA SAPPIAMO ANCHE CHE

$$\left( \sum_i e_{ii} \lambda_i \, , \, h_{\alpha_j} \right) = \alpha_j \left( \sum_i e_{ii} \lambda_i \right) = \lambda_j - \lambda_{j+1}$$

ALLORA DEVE ESSERE

$$h_{\alpha_j} = \left( e_{jj} - e_{j+1\, j+1} \right) \frac{1}{2n}$$

$$\tilde{\lambda}_{jj} = \frac{1}{2n} \qquad \lambda_{j+1} = -\frac{1}{2n} \Rightarrow 2n \sum_k \lambda_k \tilde{\lambda}_k = \lambda_j - \lambda_j$$

da cui $\quad \langle \alpha_i \; \alpha_j \rangle = \left( 2\delta_{ij} - \delta_{i\, j+1} - \delta_{i+1,\, j} \right) \frac{1}{2n}$

con questo posso calcolare $A_{ij}$ di Cartan

$$2 \frac{\langle \alpha_i \; \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i \, \alpha_i \rangle} = \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} \begin{cases} 2 \dfrac{2}{2} = 2 & i = j \\ -1 & \end{cases}$$

$\Big($ 2 $\dfrac{\quad}{2} = -1 \qquad |i-j| = 1$

cioè

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \\ 0 & -1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ la matrice di $SO(N) = A_n$